Primjena Laplaceove transformacije pri rješavanju sistema diferencijalnih jednačina

Laplaceovu transformaciju možemo koristiti da svedemo određeni sistem diferencijalnih jednačina sa datim uslovom na sistem linearnih algebarskih jednačina, gdje su nepoznate u stvari transformacije f-ja koje daju rješenje. Rješavajući po ovim nepoznatim i primjenjujući inverznu Laplaceovu transformaciju, možemo dobiti rješenje diferencijalnog sistema sa datim uslovom.

(#) Rješiti sistem diferencijalnih jednačina sa datim uslovom

$$x'(t) - 2y(t) = 4t\,; \qquad x(0) = 4,$$

$$y'(t) + 2y(t) - 4x(t) = -4t - 2\,; \qquad y(0) = -5.$$

Rj. Primjenjujući Laplace-ovu transformaciju sa obe strane diferencijalne jednačine dobijamo

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) - 2\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{4}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) - 4\mathcal{L}\{x\}(s) = -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \qquad \ldots(2)$$

Neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$ i $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$. Tada

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) = sX(s) - x(0) = sX(s) - 4$$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) + 5$$

Zamjenjujući ove izraze u sistem (2) dobijamo

$$sX(s) - 2Y(s) = \frac{4s^2+4}{s^2} \qquad \ldots(I)$$

$$-4X(s) + (s+2)Y(s) = -\frac{5s^2+2s+4}{s^2} \qquad \ldots(II) \qquad \ldots(3)$$

Da bi se rješili $Y(s)$ iz sistema prvu jednačinu ćemo pomnožiti sa $(s+2)$, drugu sa 2 i sabrati ih:

$$(s+2)\cdot(I) + 2\cdot(II): \quad [s(s+2) - 8]X(s) = \frac{(s+2)(4s^2+4)}{s^2} - \frac{10s^2+4s+8}{s^2}$$

Ovo se može pojednostaviti i dobiti

$$X(s) = \frac{4s-2}{(s+4)(s-2)}$$

Da bi izračunali inverznu transformaciju, napišimo $X(s)$ kao zbir parcijalnih razlomaka

$$X(s) = \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s-2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t}$$

Da bi odredili $y(t)$, možemo riješiti sistem (3) za $Y(s)$ i onda izračunati inverznu Laplaceovu transformaciju. Međutim, puno je lakše riješiti prvu jednačinu datog sistema za $y(t)$ po članovima od $x(t)$. Time

$$y(t) = \frac{1}{2}x'(t) - 2t$$

Zamjenjujući dobijeni $x(t)$ dobijamo

$$y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t$$

Rješenje sistema diferencijalnih jednačina sa datim uslovom je

$$\begin{cases} x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t} \\ y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t \end{cases}$$

Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$2x'' = -6x + 2y$$
$$y'' = 2x - 2y + 40\sin 3t$$

uz dati početni uslov

$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$$

Rj: Neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ i $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

S obzirom da je

$$\mathcal{L}\{x''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s\,x(0) - x'(0) = s^2 X(s)$$
$$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2 Y(s)$$
$$\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s) = \frac{3}{s^2+3^2}$$

kada primjenimo Laplaceovu transformaciju na dati sistem dobićemo

$$2s^2 X(s) = -6X(s) + 2Y(s) \qquad /:2$$
$$s^2 Y(s) = 2X(s) - 2Y(s) + \frac{120}{s^2+9}$$

$$(s^2+3)X(s) - Y(s) = 0$$
$$-2X(s) + (s^2+2)Y(s) = \frac{120}{s^2+9}$$

Sistem možemo rješiti npr. Cramerovim pravilom

$$D = \begin{vmatrix} s^2+3 & -1 \\ -2 & s^2+2 \end{vmatrix} = (s^2+3)(s^2+2) - 2 = s^4 + 5s^2 + 4 = (s^2+1)(s^2+4)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{120}{s^2+9} & s^2+2 \end{vmatrix} = \frac{120}{s^2+9} \; ; \qquad D_y = \begin{vmatrix} s^2+3 & 0 \\ -2 & \frac{120}{s^2+9} \end{vmatrix} = \frac{120(s^2+3)}{s^2+9}$$

$$X(s) = \frac{D_x}{D} = \frac{120}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$Y(s) = \frac{D_y}{D} = \frac{120(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$

Rastavimo $X(s)$ i $Y(s)$ na zbir razlomaka

$$\frac{120}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+4} + \frac{C}{s^2+9} \qquad /(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)$$

$$120 = A(s^2+4)(s^2+9) + B(s^2+1)(s^2+9) + C(s^2+1)(s^2+4)$$

Stavljajući $s^2 = -1$ (tj. $s = i$) imamo $s^2+1=0 \Rightarrow A = \frac{120}{3 \cdot 8} = 5$

za $s^2 = -4 \Rightarrow 120 = B \cdot (-3) \cdot 5 \Rightarrow B = -8$

za $s^2 = -9 \Rightarrow C = 3$

$$X(s) = \frac{5}{s^2+1} - \frac{8}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+9}$$

za vježbu isto ponoviti za $Y(s)$, $\quad Y(s) = \frac{10}{s^2+1} + \frac{8}{s^2+4} - \frac{18}{s^2+9}$

Primjenjujući inverznu Laplaceovu transformaciju na $X(s)$ i $Y(s)$ dobijamo

$$x(t) = 5\sin t - 4\sin 2t + \sin 3t$$

$$y(t) = 10\sin t + 4\sin 2t - 6\sin 3t$$

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$x' - 2x - 4y = \cos t; \qquad x(0)=0,$$
$$y' + x + 2y = \sin t; \qquad y(0)=0.$$

Rj..

Neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$ i $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$. Kako je

$$\mathcal{L}\{x'\} = sX(s) - x(0) = sX(s)$$
$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

to imamo

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) - 2\mathcal{L}\{x\}(s) - 4\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{\cos t\}(s)$$
$$\mathcal{L}\{y'\}(s) - \mathcal{L}\{x\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s)$$

$$sX(s) - 2X(s) - 4Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$
$$sY(s) + X(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s-2)X(s) - 4Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$
$$X(s) + (s+2)Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$D = \begin{vmatrix} s-2 & -4 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 - 4 + 4 = s^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \frac{s}{s^2+1} & -4 \\ \frac{1}{s^2+1} & s+2 \end{vmatrix} = \frac{s^2+4s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+1} = \frac{s^2+2s+4}{s^2+1}$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} s-2 & \frac{s}{s^2+1} \\ 1 & \frac{1}{s^2+1} \end{vmatrix} = \frac{s-2}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} = -\frac{2}{s^2+1}$$

$$X(s) = \frac{D_x}{D} = \frac{\frac{s^2+2s+4}{s^2+1}}{s^2} = \frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)}$$

$$Y(s) = \frac{D_Y}{D} = \frac{-\frac{2}{s^2+1}}{s^2} = -\frac{2}{s^2(s^2+1)}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)}\right\}(t)$$

$$\frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \ldots = \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} - 2\frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = 2 + 4t - 2\cos t - 3\sin t$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s^2(s^2+1)}\right\} = -2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}(t)$$

$$= -2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right\}(t) = -2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= -2t + 2\sin t$$

Rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 4t - 2\cos t - 3\sin t \\ y(t) = -2t + 2\sin t \end{cases}$$

Zadaci za vježbu

(1.) Primjenom metode Laplasove transformacije rješiti diferencijalne jednačine sa datim uslovom. Ovdje x', y',... označava izvod po promjenjivoj t; istu oznaku ima i simbol D.

(a) $x' = 3x - 2y$; $y' = 3y - 2x$; $x(0) = 1$, $y(0) = 1$

(b) $z' + w' = z - w$; $z' - w' = z - w$; $z(0) = 1$, $w(0) = 0$

(c) $x' = y + \sin t$; $y' = x + 2\cos t$; $x(0) = 2$, $y(0) = 0$

(d) $(D-4)[x] + 6y = 9e^{-3t}$; $x - (D-1)[y] = 5e^{-3t}$; $x(0) = -9$, $y(0) = 4$

(e) $x'' + 2y' = -x$; $-3x'' + 2y'' = 3x - 4y$; $x(0) = 2$, $x'(0) = -7$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -9$

(f) $x' + y = 1 - u(t-2)$; $x + y' = 0$; $x(0) = 0$, $y(0) = 0$

(g) $x' - y' = (\sin t)\, u(t-\pi)$; $x + y' = 0$; $x(0) = 1$, $y(0) = 1$

(h) $x' - 2y = 2$; $x' + x - y' = t^2 + 2t - 1$; $x(1) = 1$, $y(1) = 0$

(i) $x' + x - y' = 2(t-2)e^{t-2}$; $x'' - x' - 2y = -e^{t-2}$; $x(2) = 0$, $x'(2) = 1$, $y(2) = 1$.

(j) $x' = 3x + y - 2z$; $y' = -x + 2y + z$; $z' = 4x + y - 3z$; $x(0) = -6$, $y(0) = 2$, $z(0) = -12$.

Odgovori:

1o) (a) $x=e^t$; $y=e^t$.

(b) $z=e^t$; $w\equiv 0$

(c) $x=\frac{7}{4}e^t+\frac{7}{4}e^{-t}-\frac{3}{2}\cos t$; $y=\frac{7}{4}e^t-\frac{7}{4}e^{t}+\frac{1}{2}\sin t$

(d) $x=-\frac{150}{17}e^{\frac{5t}{2}}\cos\frac{\sqrt{15}\,t}{2}-\frac{334\sqrt{15}}{85}e^{\frac{5t}{2}}\sin\frac{\sqrt{15}\,t}{2}-\frac{3}{17}e^{-3t}$;

$y=\frac{46}{17}e^{\frac{5t}{2}}\cos\frac{\sqrt{15}\,t}{2}-\frac{146\sqrt{15}}{85}e^{\frac{5t}{2}}\sin\frac{\sqrt{15}\,t}{2}+\frac{22}{17}e^{-3t}$.

(e) $x=4e^{-2t}-e^{-t}-\cos t$; $y=5e^{-2t}-e^{-t}$

(f) $x=\frac{(e^t-e^{-t})}{2}-\frac{1}{2}\left[e^{t-2}-e^{-(t-2)}\right]u(t-2)$;

$y=1-\frac{e^t+e^{-t}}{2}-\left[1-\frac{e^{t-2}+e^{-(t-2)}}{2}\right]u(t-2)$

(g) $x=e^{-t}-\frac{1}{2}\left[e^{-(t-\pi)}+\cos t-\sin t\right]u(t-\pi)$

$y=e^{-t}+\left[1-\frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right]u(t-\pi)$

(h) $x=t^2$; $y=t-1$

(i) $x=(t-2)e^{t-2}$; $y=e^{t-2}$

(j) $x=-7e^{-t}+e^t$; $y=2e^{-t}$; $z=-13e^{-t}+e^t$